

L'espace des modules des connexions sur des courbes rationnelles irrégulières

Séminaire Quimperiodique

Mattia Morbello

22 janvier 2026

Université de Rennes

Connexions Méromorphes

CONNEXIONS MÉROMORPHES SUR \mathbb{P}^1

Définition

Une connexion méromorphe (∇, E, D) sur \mathbb{P}^1 est la donnée de :

- un fibré vectoriel holomorphe $E \rightarrow \mathbb{P}^1$,
- un morphisme \mathbb{C} -linéaire $\nabla: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes \Omega^1(D)$

où D est un diviseur effectif de \mathbb{P}^1 appelé diviseur polaire.

Règle de Leibnitz

$$\nabla(f\sigma) = df \cdot \sigma + f\nabla\sigma$$

Attention

Pour cet exposé on aura toujours $\text{rk}(E) = 2$.

CONNEXIONS MÉROMORPHES SUR \mathbb{P}^1

Définition

Une connexion méromorphe (∇, E, D) sur \mathbb{P}^1 est la donnée de :

- un fibré vectoriel holomorphe $E \rightarrow \mathbb{P}^1$,
- un morphisme \mathbb{C} -linéaire $\nabla: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes \Omega^1(D)$ (+ Leibnitz)

Condition de recollement

Puisque $\{U_0, U_\infty\}$ est toujours un recouvrement de trivialisations pour E ,

$$\Omega_0 = g_{0,\infty}^{-1} \cdot \Omega_\infty \cdot g_{0,\infty} + g_{0,\infty}^{-1} \cdot dg_{0,\infty}$$

TRANSFORMATION DE JAUGE MÉROMORPHE

Exemple

On considère la suivante transformation de jauge méromorphe exprimé dans la coordonnée $x \in U_0$.

$$\Psi(x) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x-q} \end{pmatrix}.$$

Son action sur une matrice $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_{1,1} & \omega_{1,2} \\ \omega_{1,2} & \omega_{1,2} \end{pmatrix}$ est la suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x-q} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \omega_{1,1} & \omega_{1,2} \\ \omega_{1,2} & \omega_{1,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x-q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x-q} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{dx}{(x-q)^2} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \omega_{1,1} & (x-q)\omega_{1,2} \\ \frac{1}{(x-q)}\omega_{2,1} & \omega_{1,2} - \frac{dx}{x-q} \end{pmatrix}.$$

Connexions du type PV

CONNEXIONS DU TYPE PV

Définition

Connexions méromorphes (∇, E, D) telles que

- $\text{rk}(E) = 2$.
- $D^{\min} = [0] + 2[1] + [\infty]$

Attention

Le diviseur polaire D^{\min} est choisi *minimal* dans la classe d'équivalence de (∇, E, D) .

Conséquence

Dans D^{\min} ils apparaissent seulement les pôles avec monodromie non triviale et avec rang de Poincaré minimale.

FORME NORMALE

Forme normale sur $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(2)$ (Diarra, Loray 2019)

$$\begin{aligned}
 d + \Omega_0 = & d + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix} \frac{dx}{(x-1)^2} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & \kappa_1 \end{pmatrix} \frac{dx}{x-1} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\kappa_0 \end{pmatrix} \frac{dx}{x} \\
 & + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \kappa_\infty & 0 \end{pmatrix} xdx + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p & -1 \end{pmatrix} \frac{dx}{x-q} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \hat{K} & 0 \end{pmatrix} dx,
 \end{aligned}$$

Données spectrales résiduelles

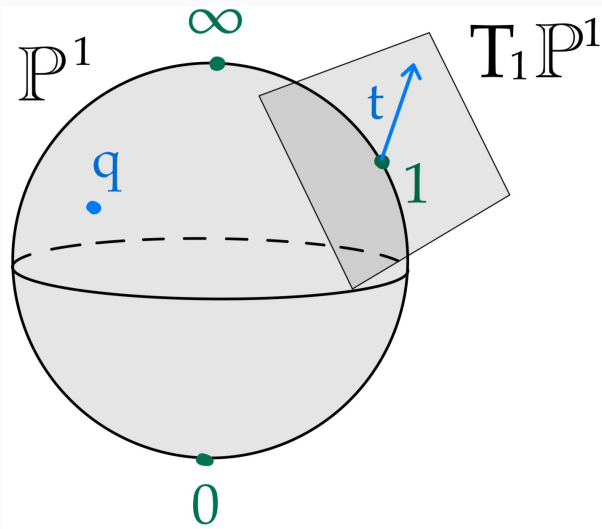
On fixe un ensemble "générique"

$$\Theta := \{\kappa_0, \kappa_1, \kappa_\infty\} \subseteq \mathbb{C}$$

bien défini à décalages d'entiers pré.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DE t ET q

Courbe rationnelle irrégulière



Espace des Modules et Compactification

ESPACE DES MODULES

Proposition

$[(\nabla, E, D)]$ du type PV "générique" \iff une courbe rationnelle irrégulière et $p \in \mathbb{C}$.

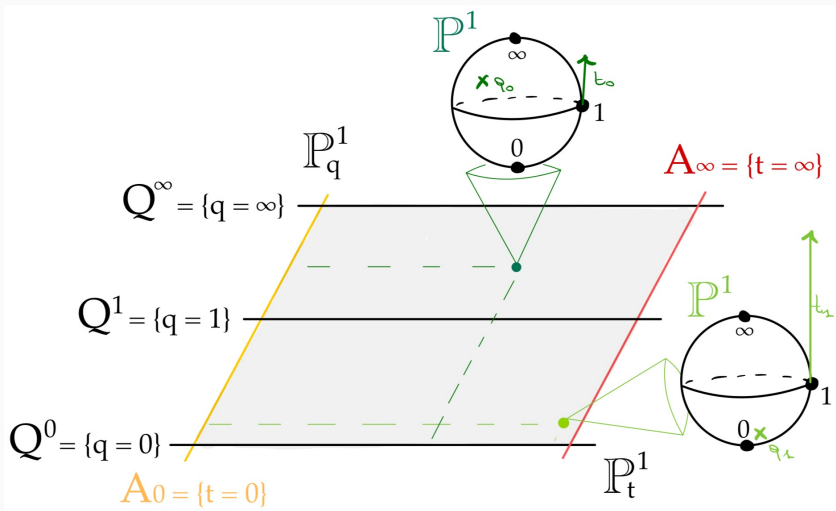
Espace des modules des courbes rationnelles irréguliers \mathcal{M}

$$\mathcal{M} := \left\{ q \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}; t \in T_1\mathbb{P}^1 \setminus \{0\} \right\}.$$

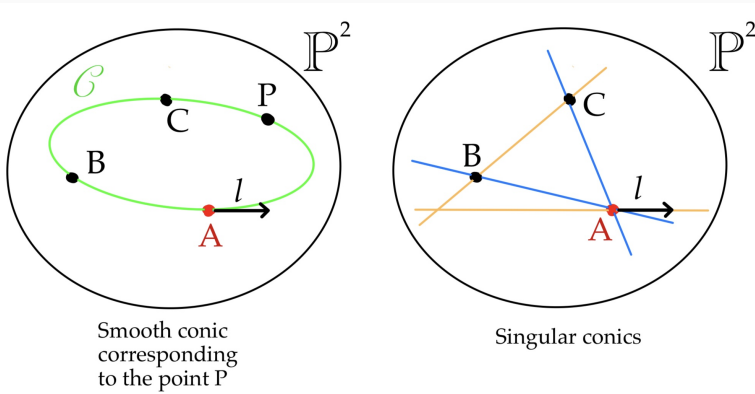
Espace des Modules des connexions PV

$$\text{Con}_{\Theta}^V \supseteq \mathcal{M} \times \mathbb{C}$$

L'ESPACE DES MODULES \mathcal{M}



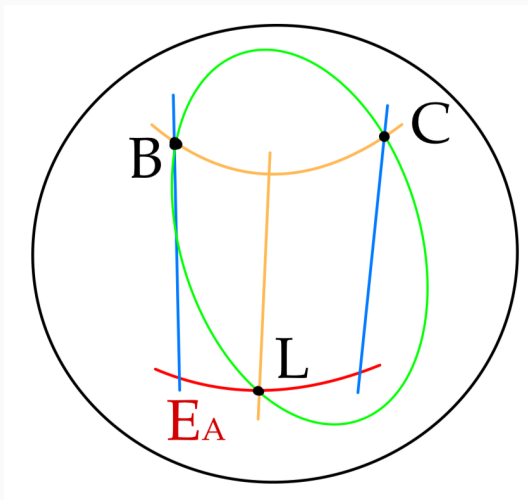
ESPACE DES MODULES DES CONIQUES



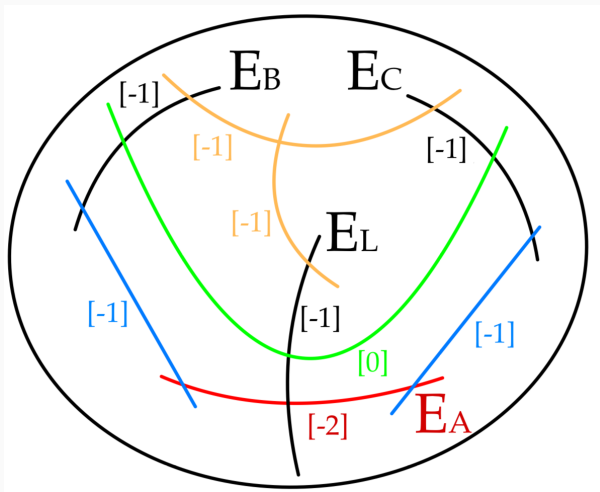
Espace des Modules des telles coniques lisses

$$\mathbb{P}^2 \setminus (\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}, l) \cong \mathcal{M}$$

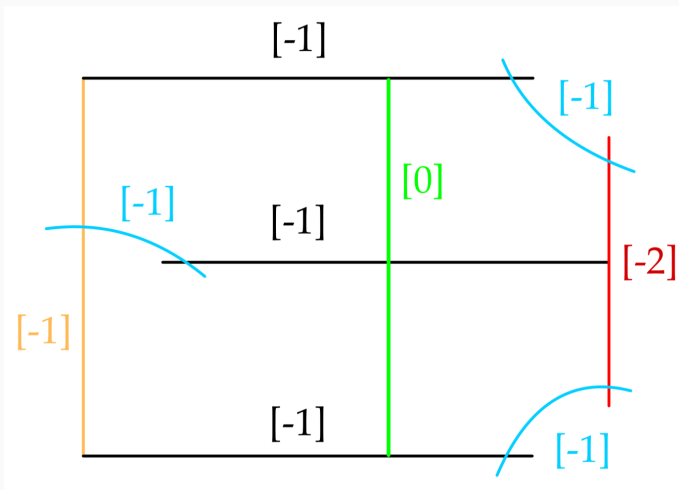
ÉCLATEMENT DE A



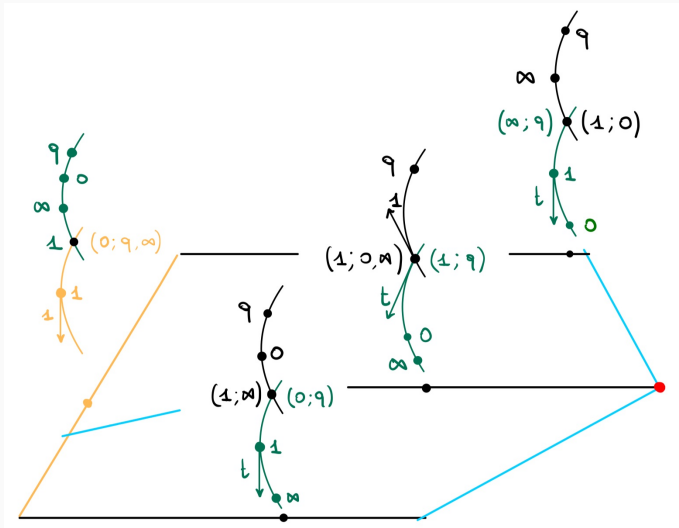
ÉCLATEMENT DE B , C ET L



COMPACTIFICATION $\overline{\mathcal{M}}$



COURBE UNIVERSELLE



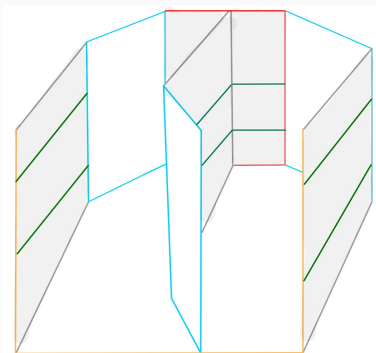
COMPACTIFICATION $\overline{\text{Con}}_V^\ominus$

Extension du Fibré en Droites (M., 2025)

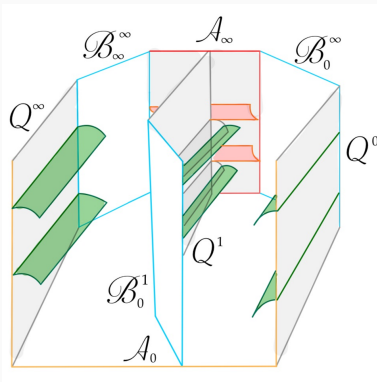
Le fibré trivial $\mathcal{M} \times \mathbb{C}$ s'étends à

$$\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{M}}} \left(2Q_0 + B_\infty^0 - B_\infty^\infty + A_0 \right).$$

En plus il est triviale sur Q^0 , Q^∞ et $Q^1 \cup A_\infty$.



COMPACTIFICATION $\overline{\mathcal{C}on_V^\Theta}$



Compactification $\overline{\mathcal{C}on_V^\Theta}$ (M., 2025)

- Compactification $\overline{\mathcal{C}on_V^\Theta} \left(2Q_0 + B_\infty^0 - B_\infty^\infty + A_0 \right)$,
- Eclatement des sections en verte.

GRAZIE :)

